



Matemàtiques II

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a + 2 & a - 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calculeu els valors de a per als quals la matriu $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ no tingui inversa. (6 punts)

(b) Suposant que $a = 1$, trobau totes les matrius \mathbf{X} que satisfan $\mathbf{AX} + \mathbf{Id} = \mathbf{A}$, on \mathbf{Id} és la matriu identitat. (4 punts)

2 (a) Discutiu per a quins valors de a i b el sistema següent és compatible:

$$\left. \begin{aligned} ax + (2a + 1)y - az &= 1, \\ ax + y - az &= -2b, \\ ay + (1 - a)z &= b. \end{aligned} \right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

3 Considerem la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{2} + \cos x}$.

(a) Verifiqueu que $f(0) = f(\pi) = 0$. (1 punt)

(b) Comproveu que l'equació $f'(x) = 0$ no té cap solució a l'interval $(0, \pi)$. (4 punts)

(c) Expliqueu per què no es pot aplicar el teorema de Rolle en aquest cas. (5 punts)

4 Feu un dibuix del recinte limitat per les corbes $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = 4x$ i $y_3(x) = \frac{1}{4}x$, per als valors de x positius. (4 punts) Calculeu l'àrea d'aquest recinte. (6 punts)



Matemàtiques II

Model 1

OPCIÓ B

1 Donat el punt $P(1, 1, 1)$ i el pla $\pi : x - y + z = 5$.

(a) Calculeu les equacions contínues de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P . (4 punts)

(b) Calculeu el simètric del punt P respecte del pla π . (6 punts)

2 (a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left. \begin{aligned} ax + (2a + 1)y + (1 - a)z &= 0, \\ 3ax + az &= a, \\ ax + ay + (1 - a)z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(7 punts)

(b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

3 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

(a) Calculeu les asímptotes de la funció $f(x)$. (3 punts)

(b) Calculeu els extrems de la funció $f(x)$. (7 punts)

4 Calculeu la següent integral indefinida $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx$. (10 punts)